数理解析研究所講究録
第 1583 巻 2008 年 65-76

デカルトの円定理に関連して

栃木県立足利高等学校　　小曽根　淳 (Jun Ozone)
Tochigi Prefectural Ashikaga Senior High School

1．始めに

平成 19 年、群馬県和算研究会主催「桐生の算額巡りと研修」開催の折、当研究会が崇禅寺[1]に奉納した算額[2]の解説をすることになった。平成 2 年の算額奉納式では、大山誠氏が「崇禅寺算額縁起とその解説」を、デカルトの円定理とシュタイナーの公式を用いて説明され、新しい不変式を明らかにされた。内容は、円の接触問題と球の接触問題である。

本稿では、まずデカルトの円定理とソディーの 6 球連鎖定理を取り上げ、崇禅寺の算額の解法について検討する。次に、別解を示し、算額における不変式成立の条件を明らかにする。更に、J.B.Wilker 等の先行研究に触れ、その関連を考察する。以上を通じて、円や球の接触問題が古くから関心をもたれ研究されてきた、歴史の一端を明らかにする。

2．デカルトの円定理とソディーの 6 球連鎖定理について

まず、デカルトの円定理について述べる。

(デカルトの円定理)　右のように、互いに外接する 3 つの円がある。それぞれを C_1, C_2, C_3 とし、それらに接する円を C_4 する。実際、C_4 としては、それらの 3 円に外接する円とそれらを内接させる円の 2 個がある。これらの半径を r_i, 曲率を ε_i (i＝1，2，3、4）とする。

すると、ε_4 は、次の式によって与えられる。

$$2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2) = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)^2$$

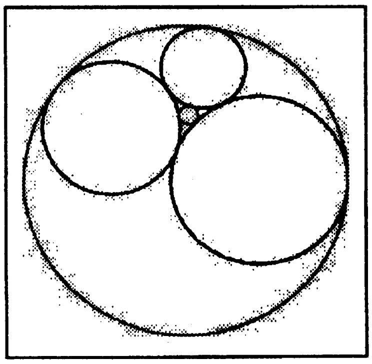

図 1

（注 1）図 1 は、David Austin: When Kissing Involves Trigonometry, American Mathematical Society Feature Column に依っている。

歴史的には、紀元前 3 世紀にアポロニウスがこの問題を解いている。その後 1643 年、デカルトがボヘミア国王の娘・エリザベス王女宛ての手紙でこの問題を取り上げたことで、デカルトの円定理[3]として、広く知られるようになった。デカルトは不変式を半径間の関係として表示したが、ダン・ペドーは、曲率を用いた表現をデカルトの円定理と呼んでいる。

更に、1936 年にはノーベル化学賞受賞のフレデリック・ソディーも再発見し、これを球の問題に拡張し、6 球連鎖定理と呼ばれている。

和算では、Descartesの円定理に関して、互いに外接する3つの円C_1,C_2,C_3に外接する円の半径を求める問題が、1796年に神楽坂毘沙門堂に掲額された。また、その3円C_1,C_2,C_3を内接させる円の半径を求める問題は、1811年長野県・一川谷大元神社に掲額された。(4)。

次に、ソディーの6球連鎖定理(5)について述べる。

(ソディーの6球連鎖定理)　右のように2個の外接している球を外球に内接させる。その外球と内部の2球のいずれにも接し、また次々と外接する球を充填していく。すると、最初の球と6番目の球が外接して終了する。

（注2）図2は、日経サイエンスHPの「算額の問題に挑戦して見ませんか？」の問題8の図に依っている。

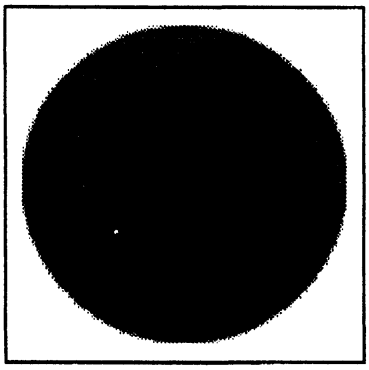

図2

我が国では、1822年神奈川県・寒川神社に掲げられた算額の中で、6球連鎖の問題が解かれていた。そこでは、何個の球が入るかという個数の問題として扱われた。これが、「和算のなかで最初に6球連鎖を論じた問題」であり、これ以後、立体についても多くの和算家が注目することとなった。」(6)

その内容は、Descartesの円定理を3次元に拡張した不変式、

$$3(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5)^2$$

を順次計算し、$r_7=r_1$を導き、6球連鎖を示した。(7)

3. デカルトの円定理とSteinerの公式について

デカルトの円定理を適用する場合、2次方程式を解き不適な解を捨てる。一方、Steinerの公式を用いると手間が省ける反面、他の文字に置き換えて利用する場合、式の対称性に注意する必要がある。

予備定理1　(デカルトの円定理)　互いに外接する3つの円C_1,C_2,C_3に接する円をC_4とし、それらの半径をr_i, 曲率をε_i (i= 1, 2, 3, 4) とする。

すると、次式が成立する。　$2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2) = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)^2$ ・・・・・・・ $\boxed{1\cdot1}$

ここで3円C_1,C_2,C_3が円C_4に内接するときは、ε_4 を $-\varepsilon_4$ に置き換える。

予備定理2　(Steinerの公式)(8)　互いに外接する3つの円C_1, C_2, C_3に接する円をC_4とし、それらの半径を r_i, 曲率を ε_i (i= 1, 2, 3, 4) とする。

3円C_1, C_2, C_3が円C_4に内接するときの円C_4の半径を r_4、曲率を ε_4 とし、外接するときの半径を r_4', 曲率を ε_4' とすると、次式が成立する。

$$\varepsilon_4 = -(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1} \cdots\cdots \boxed{2\text{-}1}$$

$$\varepsilon_4{}' = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1} \cdots\cdots \boxed{2\text{-}2}$$

ここで、**予備定理１**と**予備定理２**の関係について考察する。

（1）まず、３円 C_1, C_2, C_3 が円 C_4 に内接するとき、中心を結んで出来る３角形で、余弦定理を用いて、

$$\varepsilon_4 = -(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) \pm 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1} \cdots\cdots \boxed{1\text{-}2}$$

を導き、復号で＋の方を採り、

$$\varepsilon_4 = -(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1} \cdots\cdots \boxed{2\text{-}1}$$

を得る。

同様に、３円 C_1, C_2, C_3 が円 C_4 に外接するときは、

$$\varepsilon_4{}' = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) \pm 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1} \cdots\cdots \boxed{1\text{-}3}$$

となり、

$$\varepsilon_4{}' = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1} \cdots\cdots \boxed{2\text{-}2}$$

が得られる。

（2）ここで、**予備定理１**の内容について検討する。**予備定理１**は、$\boxed{1\text{-}3}$ と同値である。$\boxed{1\text{-}3}$ で $\varepsilon_4{}'$ を $-\varepsilon_4$ で置き換えると $\boxed{1\text{-}2}$ となる。しかし、$\boxed{2\text{-}2}$ で $\varepsilon_4{}'$ を $-\varepsilon_4$ で置き換えても $\boxed{2\text{-}1}$ にならない。これが混乱を招いている。

（3）**予備定理２**は**予備定理１**の ε_4 を直接与えたものであり、ε_4 を求める際には便利であるので、例えば ε_3 を求めたいときはどうするのか、が次の問題である。

（i）３円 C_1, C_2, C_3 が円 C_4 に外接するとき、

$$\varepsilon_4{}' = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1}$$

を導いた元の式は、

$$2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2) = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)^2 \cdots\cdots \boxed{1\text{-}1}$$

であり、それぞれの文字について対称であるから、ε_3 と $\varepsilon_4{}'$ を入れ換えることができる。

（ii）３円 C_1, C_2, C_3 が円 C_4 に内接するときは、

$$\varepsilon_4 = -(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1} \cdots\cdots \boxed{2\text{-}1}$$

を導いた元の式は、

$$2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2) = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)^2 \cdots\cdots \boxed{1\text{-}4}$$

であり、$\boxed{1\text{-}4}$ 式の右辺の $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4$ に－１をかけた式

$$2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_3^2) = (-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4-\varepsilon_3)^2 \cdots\cdots \boxed{1\text{-}5}$$

から ε_3 を求めることを考えると、$\boxed{1\text{-}5}$ は $\boxed{1\text{-}4}$ において、

ε_1 を $-\varepsilon_1$ に、ε_2 を $-\varepsilon_2$ に置き換え、ε_3 と ε_4 を入れ換えれば良い。

従って、$\boxed{2\text{-}1}$ 式の $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ を $(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_3)$ に変換すれば良い。

即ち、

$$\varepsilon_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_4) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_4 - \varepsilon_4\varepsilon_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \boxed{2\cdot 3}$$

以上をまとめれば、次のようになる。

予備定理1では、内接の場合と外接の場合を含めて、単一の式で表現できる。具体的には、それぞれの2次方程式を解き、不適なものを捨てる。

予備定理2では、既に式が求められていて、利用する際、便利である。 ε_4 を他の文字に置き換えて利用する場合、内接と外接の場合で異なることに注意する。

4.崇禅寺の算額題について

崇禅寺の算額は、平成2年掲額したものであるが、内容的には、第一問がデカルトの円定理に、第二問がソディーの6球連鎖定理に関連している。研究の発端は福井県鯖江市船津神社の算額であり、道脇義正・群馬県和算研究会前会長によれば、「円内で互いに接触する円の曲率間に存在する不変性を求め、その三次元への拡張を求めた。・・・その後この拡張された三次元の問題に Descartes の円定理の拡張である Wilker の定理を適用して非常に興味ある結果を得・・・その一部分がはしなくも Sir Fredrick Soddy(1877～1956)の The Hexlet という論文と一致することがわかった。」[(9)] と述べられている。

まず、平成2年の算額奉納式で解説された「崇禅寺算額縁起とその解説」[(10)]から第一問のポイントとなる数学的な部分を取り上げ、その解法を検討する。

[第一問] 算額題の解説

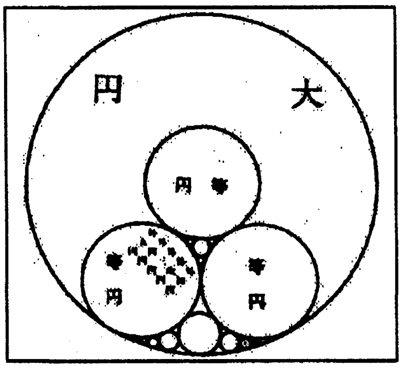

図3

(題意)

今大円O（半径3r、曲率ρ）内に互いに外接する3等円（半径r、曲率3ρ）のうち2等円が円Oに内接している。この隙間に内累円と外累円を容れる。

このとき、各累円の直径を大円径で表せ。

ただし、内累円とは等円に外接し大円に内接している円の列である。

(術文)

内n円径＝大円径÷｛$2n(n+\sqrt{3})+3$｝

外n円径＝内n円径×大円径÷(3・大円径-6・内n円径)

始めに、内累円の列を$\{P_n\}$($n=1,2,3,\cdots$)とし、円 P_n の半径を p_n, 曲率を τ_n とする。同様に、外累円の列を$\{Q_n\}$($n=1,2,3,\cdots$)とし、円 Q_n の半径を q_n, 曲率を σ_n とする。

元の解説では、内累円の場合は、**予備定理1**の $2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)^2$ 、

外累円の場合は、**予備定理２**の $\varepsilon_4{}' = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1}$ を用いて、それぞれ解いている。

しかし、前述のように、以下では内累円の場合も**予備定理２**を用いて解答するが、元の解説との違いは、そこだけである。

〔第一問の解答〕

1．隣円と１等円に外接し、かつ大円に内接する円（内累円）P_n の半径 p_n, 曲率 τ_n に対して、予備定理２から得られた $\boxed{2\cdot3}$ を用いる。

$\varepsilon_1=3\rho$, $\varepsilon_2=\tau_{n-1}$, $\varepsilon_3=\tau_n$, $\varepsilon_4=\rho$ として、

$$\varepsilon_3=(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_4)+2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_2\varepsilon_4-\varepsilon_4\varepsilon_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

へ代入すると、

$$\tau_n=(\tau_{n-1}+2\rho)+2\sqrt{\rho(2\tau_{n-1}-3\rho)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

漸化式②を $\tau_0=3\rho$ として順次計算して、

$$\tau_1=(5+2\sqrt{3})\rho$$
$$\tau_2=(11+4\sqrt{3})\rho$$
$$\tau_3=(21+6\sqrt{3})\rho$$
$$\tau_4=(35+8\sqrt{3})\rho$$

$$\tau_5=(53+10\sqrt{3})\rho$$

が得られ、

$$\tau_n=\{2n(n+\sqrt{3})+3\}\rho \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

と推定できる。この推定が正しいことは数学的帰納法で証明できる。

従って、

$$p_n = \boxed{\frac{3r}{2n(n+\sqrt{3})+3}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

2．隣円と２等円のいずれにも外接する円（外累円）Q_n の半径 q_n, 曲率 σ_n に対して、**予備定理２**を適用する。$\varepsilon_1=3\rho$, $\varepsilon_2=3\rho$, $\varepsilon_3=\sigma_{n-1}$, $\varepsilon_4{}'=\sigma_n$ として、

$$\varepsilon_4{}' = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1}$$

へ代入すると、

$$\sigma_n = (\sigma_{n-1}+6\rho)+2\sqrt{6\rho\sigma_{n-1}+9\rho^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

漸化式⑨を $\sigma_0=3\rho$ として順次計算して、

$$\sigma_1=(9+6\sqrt{3})\rho$$
$$\sigma_2=(27+12\sqrt{3})\rho$$

$$\sigma_3=(57+18\sqrt{3})\rho$$
$$\sigma_4=(99+24\sqrt{3})\rho$$
$$\sigma_5=(153+30\sqrt{3})\rho$$

が得られ、

$$\sigma_n=\{6n(n+\sqrt{3})+3\}\rho \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

と推定できる。また、この推定が正しいことは数学的帰納法で証明できる。

従って、

$$q_n=\boxed{\frac{3r}{6n(n+\sqrt{3})+3}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

3．③と⑥より不変式、

$$\boxed{3\tau_n-\sigma_n=6\rho} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

が成立する。解説では、⑧がこの問題での不変式と指摘されている。

5．崇禅寺算額題・第一問の別解について

解答では、

$$\tau_n=(\tau_{n-1}+2\rho)+2\sqrt{\rho(2\tau_{n-1}-3\rho)}$$

や

$$\sigma_n=(\sigma_{n-1}+6\rho)+2\sqrt{6\sigma_{n-1}+9\rho^2}$$

などの２項間漸化式の一般項を求めることが一番の問題であった。解説では、帰納的な方法で求めている。

次に、τ_n や σ_n を求めるのに直接的な方法がないのか、検討する。便利な**予備定理２**に対して、より根本的な**予備定理１**に戻ることから始める。

上の二つの漸化式は、**予備定理１**

$$2(e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_4^2)=(e_1+e_2+e_3+e_4)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \boxed{1\cdot1}$$

において、e_1 から e_4 までの４個の曲率の内２個を定数 α、β(１個が負の値を取る場合もある)で与え、残りの２個を γ_n と γ_{n-1} として、γ_n を求めることである。

即ち、$\boxed{1\cdot1}$を次のように書き換える。

$$2(\gamma_n^2+\gamma_{n-1}^2+\alpha^2+\beta^2)=(\gamma_n+\gamma_{n-1}+\alpha+\beta)^2$$

ここから、γ_nについて解くと、

$$\gamma_n=\gamma_{n-1}+\alpha+\beta+2\sqrt{(\alpha+\beta)\gamma_{n-1}+\alpha\beta} \cdots\cdots\cdots ⑨$$

ここで、⑨において、$\sqrt{(\alpha+\beta)\gamma_{n-1}+\alpha\beta}=\delta_{n-1}$ とおくと $\gamma_n=\dfrac{\delta_n^2-\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ となり、

⑨をγ_nで表すと、

$$\frac{\delta_n^2-\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\delta_{n-1}^2-\alpha\beta}{\alpha+\beta}+2\delta_{n-1}+\alpha+\beta$$

両辺に $\alpha+\beta$ をかけて整理すると、

$$\boxed{\delta_n=\delta_{n-1}+\alpha+\beta} \cdots\cdots\cdots ⑩$$

⑩より、数列 $\{\delta_n\}$ は等差数列であるから、

$$\boxed{\delta_n=(\alpha+\beta)n+\delta_0} \cdots\cdots\cdots ⑪$$

となり、条件を与えれば、σ_n は求まる。従って、p_n や q_n が④や⑦のように求まる。

6．応用

（1）Descartes の円定理と Steiner の環円定理

Descartes の円定理は、Pappus－Steiner の環円定理の特別の場合でもある。

(Pappus－Steiner の環円定理)[11]

円Ｏ内に円Ｏ´がある。これらに接しかつ互いに外接する円を順次画いて、初めの円に外接させることが一度できれば、どの位置からはじめても必ず上のようにすることができる。

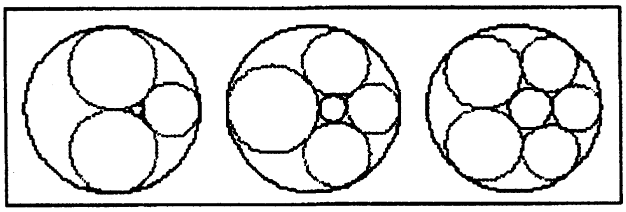

図４

（注）上図は Wolfram MathWorld の Steiner Chain に依っている。

そして、Pappus－Steiner の環円定理における作図可能性については、次の定理がある。

(Steiner の定理)[11′]

上で、円Ｏ,Ｏ´の半径をｒ，ｒ´、中心間距離をＯＯ´＝ｄとする。２円Ｏ,Ｏ´に接し互いに外接するｍ個の円が、円Ｏ´の周りをｎ回転して最初の円に外接したとすれば、

$$(r-r')^2-4rr'\tan^2\frac{n\pi}{m}=d^2$$

デカルトの円定理は、Pappus－Steiner の環円定理の m＝３、n＝１の場合で、次の性質が成り立つ。

（性質１）　右のように、互いに外接する３つの円 C_1, C_2, C_3 に対して、それらを内接させる円をO、それらと外接する円をO´とする。それぞれの曲率を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon, \varepsilon'$ とすると、$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ の値は、円 C_1, C_2, C_3 の位置によらず一定である。

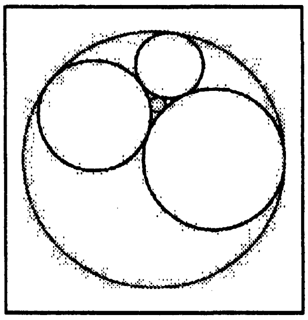

図５

（証明）　Steiner の定理より、

$$\varepsilon=-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1}$$

$$\varepsilon'=(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1}$$

二式を辺々引いて、

$$\boxed{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=(\varepsilon'-\varepsilon)/2}$$

（２）置換量の不変性について

まず、γ_n において α, β に該当するものを、τ_n と σ_n について、それぞれ a, b と c, d とする。また、γ_n における $\delta_n=\sqrt{(\alpha+\beta)\gamma_n+\alpha\beta}$ に該当するものを、τ_n と σ_n について、それぞれ λ_n と μ_n とする。⑮から、別解で用いた二つの置換式、

$$\lambda_n=\sqrt{(a+b)\tau_n+ab}=(a+b)n+\lambda_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑫$$

$$\mu_n=\sqrt{(c+d)\sigma_n+cd}=(c+d)n+\mu_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑬$$

に注目すると、興味深い関係が得られる。

（性質２）a, b, c, d 及び λ_n, μ_n について、$\boxed{(c+d)\lambda_n-(a+b)\mu_n}$ の値は、一定である。

（証明）⑫と⑬から n を消去すると、

$$\boxed{(c+d)\lambda_n-(a+b)\mu_n=(c+d)\lambda_0-(a+b)\mu_0} \cdots\cdots\cdots\cdots ⑭$$

が示せる。

更に、⑭において右辺を０と置くと、次が得られる。

（性質２）の系

$$\boxed{(c+d)\lambda_n=(a+b)\mu_n \Leftrightarrow (c+d)\lambda_0=(a+b)\mu_0} \cdots\cdots\cdots ⑮$$

(例)

これを第一問に適用すると、

$$\boxed{\mu_n=3\lambda_n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑯$$

という、簡明な不変式が得られる。この時、⑭の式の値は、当然０となっている。

（３）置換式の幾何学的な意味について

この置換式$\delta_n=\sqrt{(\alpha+\beta)\gamma_n+\alpha\beta}$　はどのような意味をもっているのか？

Coxeter は、Steiner の公式中の量

$\delta=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1}$の幾何学的な意味を次のように明らかにしている。(3)

右の図６で、互いに外接する３つの円（曲率$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$）の３つの接点を通る円の曲率をδとすると、$\delta=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1}$　となるのである。

（注）図６は、J.B.Wilker : Four Proofs of A Generalization of The Descartes Circle Theorem に依っている。

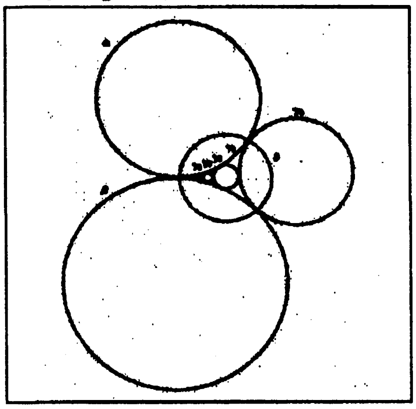

図６

それでは、既に得られた、

$$\boxed{\delta_n=\delta_{n-1}+\alpha+\beta} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑩$$

は、この立場からどのような意味があるのか？

円δが、３円α，β，γに直交している。このように直交円を次から次へと画いていくと、それらの曲率が等差数列になることを、⑩は示している。

また、（性質１）において、$\boxed{\varepsilon+\varepsilon' = 4\delta}$ が成立する。

（４）曲率の不変式の成立条件について

第一問で得られた不変式

$$\boxed{3\tau_n-\sigma_n=6\rho}$$

は、解説の中で τ_n と σ_n の形を具体的に求めた結果、偶然得られたように見える。

では成立の条件は何なのか、次に検討する。

そこで、⑬^{2}と⑭^{2}よりｎ^{2}を消去して、

$$(a+b)(c+d)^2\tau_n-(a+b)^2(c+d)\sigma_n+ab(c+d)^2-cd(a+b)^2$$
$$=\{(c+d)\lambda_0-(a+b)\mu_0\}\{2(a+b)(c+d)n+(c+d)\lambda_0+(a+b)\mu_0\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑰$$

⑰において、次の同値関係が得られる。

$$\boxed{(a+b)(c+d)^2\tau_n-(a+b)^2(c+d)\sigma_n+ab(c+d)^2-cd(a+b)^2=0 \Leftrightarrow (c+d)\lambda_0=(a+b)\mu_0} \cdots\cdots ⑱$$

更に、⑱の条件、

$$\boxed{(c+d)\lambda_0=(a+b)\mu_0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑲$$

を曲率を用いて表すと、

$$\boxed{(c+d)\tau_0-(a+b)\sigma_0=\frac{(ad-bc)(ac-bd)}{(a+b)(c+d)}} \quad \cdots\cdots ⑳$$

実際、第一問では、

$a=3\rho, b=-\rho, \tau_0=3\rho, \lambda_0=\sqrt{3}$；　$c=d=\sigma_0=3\rho, \mu_0=3\sqrt{3}$　であり、

⑱や⑳で確かめれば、第一問の結果の成立が確かめられる。

（２）置換した量の不変式　と　（３）曲率の不変式の成立条件　のまとめ

（２）の⑮と（３）の⑱は、同一の式⑲を含んでいる。そこで、これを以下にまとめる。

（性質３）

$$\boxed{\begin{aligned}&(a+b)(c+d)^2\tau_n-(a+b)^2(c+d)\sigma_n+ab(c+d)^2-cd(a+b)^2=0\Leftrightarrow\\ &\qquad\qquad (c+d)\lambda_n=(a+b)\mu_n\Leftrightarrow(c+d)\lambda_0=(a+b)\mu_0\end{aligned}}$$

7．置換式　$\delta_n = \sqrt{(\alpha+\beta)\gamma_n+\alpha\beta}$　と　Wilker の公式

Descartes の円定理を具体的に運用できる形にしたのが Steiner の公式であった。J.B.Wilker は、第 n 番目の累円の半径を Steiner の公式によって導いた。更に、その公式の４つの証明法を明らかにしている。(12)

Wilker は、Steiner の公式で、$\varepsilon_1=\alpha,\ \varepsilon_2=\beta,\ \varepsilon_3=\gamma_{n-1},\ \varepsilon_4=\gamma_n$　とおいた

$$\gamma_n=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma_{n-1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$

から γ_n を n で表すことに成功し、更に、４通りの証明があることを明らかにしている。

(Wilker の公式)

$$\boxed{\gamma_n=\gamma_0+2n\delta+n^2(\alpha+\beta)}$$

その証明は、（１）Steiner の公式から出発するもの、（２）Descartes の円定理から出発するもの、（３）反転法を用いるもの、の三つに大別される。そして、（１）が二分され計４通りの証明法があるが、紙面の都合で（１）Steiner の公式から出発する一方の方法のみ採り上げる。

R.G.Stanton(13) の Version

$\gamma_n=ac_n^2-\dfrac{b}{a}$,　$c_n=\dfrac{\sqrt{b+a\gamma_n}}{a}$　とすると、$c_{n+1}=c_n+1$　となり、

$c_n=c_0+n=\dfrac{\sqrt{b+a\gamma_0}}{a}+n$　が得られる。この c_n を元の式に置き換えて、

$$\gamma_n=\gamma_0+2n\sqrt{\alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma_0}+n^2(\alpha+\beta)=\gamma_0+2n\delta+n^2(\alpha+\beta)$$

先述の別解における置換式は、この R.G.Stanton の方法と共通性がある。
即ち、R.G.Stanton の変換式で a ＝ 1 とおけば、先述の置換式となる。

8．終わりに

本稿では、デカルトの円定理とソディーの6球連鎖定理の内容と歴史を調べた。次に崇禅寺の算額の解法について検討し、別解を示した。その別解によって崇禅寺算額の不変式の成立条件を明らかにした。更に、H.S.M.Coxeter や J.B.Wilker の先行研究との関連も明らかにし、その位置付けを考察した。最後に、人々が円や球の接触問題に古くから興味・関心を覚え、如何に研究してきたのか、その歴史の一端を示した。

頭注；

（1）所在地は桐生市川内町2丁目651。元久二年（1205）法然上人の弟子智明上人により開創された。

（2）平成2年4月29日は、算額奉納式の後、境内の懐石料理・无量庵で60名以上の参加者で盛大な祝賀会が催された。

（3）H.S.M.Coxeter：The Problem of Apollonius, The American Mathematical Monthly, Vol.75,No.1.(Jan.1968),p.5-15.

（4）深川英俊、ダン・ペドー：「日本の幾何ー何題解けますか？」、森北出版、1991、p.22－23

（5）証明は例えば、日経サイエンス社 HP「算額の問題に挑戦してみませんか？」に、空間における反転は、前原潤：円と球面の幾何学、朝倉書店、1998 に詳しい。

（6）小林龍彦：『探賾算法』の曲率問題について、和算家の生涯と業績（道脇義正編著）収録、多賀出版、1985、p.213-228

（7）深川英俊、ダン・ペドー：「日本の幾何ー何題解けますか？」、森北出版、1991、p.118-121

（8）岩田至康：幾何学大辞典（1）、槇書店、1971、p. 384-385

（9）道脇義正：Descartes の円定理と Soddy の六球連鎖定理に関連して、和算家の生涯と業績（道脇義正編著）収録、多賀出版、1985、p.238-248

（10）大山誠：崇禅寺算額題の解説、崇禅寺算額縁起とその解説（道脇義正）収録、群馬県和算研究会、1990、p.5-13

（11）岩田至康：幾何学大辞典（1）、槇書店、1971、p.284　　（11′）同上、p.284

（12）J.B.Wilker：Four Proofs of A Generalization of The Descartes Circle Theorem, The American Mathematical Monthly, Vol.76,No.3.(Jan.1968),p.278-282.

（13）R.G.Stanton, H.C.Williams, C.R.Zarnke, A Packing Problem, Cand.Math.Bull. Vol.10 (1966) p.287-297.